



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. Д. Копнова

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

**УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА И МАГИСТРАТУРЫ**

*Рекомендовано Учебно-методическим отделом
высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по экономическим
направлениям и специальностям*

**Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru**

Москва ■ Юрайт ■ 2016

УДК 336(075.8)

ББК 65.261я73

К65

Автор:

Копнова Елена Дмитриевна — доцент Департамента статистики и анализа данных факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Рецензенты:

Мхитарян В. С. — доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой статистических методов, руководитель Департамента статистики и анализа данных факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Балаш В. А. — доктор экономических наук, профессор кафедры математической экономики Саратовского государственного университета имени Н. А. Чернышевского.

Копнова, Е. Д.

К65 Финансовая математика : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Е. Д. Копнова. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 413 с. — Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-6479-0

Издание содержит описание базовых методов количественного финансового анализа. В нем изложены основные модели современных финансовых вычислений от расчетов по кредитным операциям до оценки стоимостей деривативов и анализа временных рядов.

Рассматриваются числовые примеры типовых расчетов, а также приводятся задачи для самостоятельного решения.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов бакалавриата и магистратуры, обучающихся по экономическим и финансовым специальностям в рамках курса «Финансовая математика» и других курсов, связанных с методами количественного финансового анализа.

УДК 336(075.8)

ББК



Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

ISBN 978-5-9916-6479-0

© Копнова Е. Д., 2016

© ООО «Издательство Юрайт», 2016

Оглавление

Предисловие	9
Глава 1. Введение в финансовую математику	11
1.1. Предмет и метод финансовой математики	11
1.2. История и современное состояние финансовой математики	13
1.3. Основные понятия в финансовой математике	14
<i>Контрольные вопросы</i>	19
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	20
Глава 2. Модели начисления процентов.....	22
2.1. Начисление процентов по простым ставкам	22
2.1.1. Определение периода начисления простых процентов	22
2.1.2. Декурсивный метод начисления простых процентов	24
2.1.3. Антисипативный метод начисления простых процентов	28
2.1.4. Начисление процентов по простой переменной ставке	30
2.1.5. Доходность финансовой операции в виде простой ставки	31
2.2. Начисление процентов по сложным ставкам	34
2.2.1. Декурсивный метод начисления сложных процентов.....	34
2.2.2. Антисипативный метод начисления сложных процентов	37
2.2.3. Начисление процентов по сложной переменной ставке	39
2.2.4. Годовая номинальная процентная ставка	41
2.2.5. Начисление процентов по непрерывной ставке	45
2.2.6. Доходность финансовой операции в виде сложной ставки	48
<i>Контрольные вопросы</i>	52
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	53
Глава 3. Потоки платежей	58
3.1. Принцип финансовой эквивалентности	58
3.1.1. Эквивалентные платежи и серии платежей	58
3.1.2. Уравнение эквивалентности	59
3.2. Конверсия платежей	60
3.2.1. Виды конверсий платежей	60
3.2.2. Замена одного платежа другим платежом	60
3.2.3. Консолидация потока платежей.....	63
3.2.4. Замена данного потока платежей другим потоком платежей.....	65
3.2.5. Рассрочка платежа.....	67
3.2.6. Эквивалентность платежей при применении простой ставки.....	68
3.3. Аннуитеты	70
3.3.1. Определение аннуитета.....	70
3.3.2. Классификация аннуитетов.....	70

3.3.3. Основные модели аннуитетов	72
<i>Контрольные вопросы</i>	93
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	94
Глава 4. Планирование погашения долга в кредитных операциях	97
4.1. Общая характеристика кредитных операций	97
4.1.1. Основные показатели кредитной операции	97
4.1.2. Методы определения расходов по займу	98
4.1.3. Классификация способов погашения кредита	98
4.2. Основные способы погашения кредита	98
4.2.1. Возмещение долга способом дифференцированных платежей	98
4.2.2. Возмещение долга способом аннуитетных платежей	100
4.2.3. Раздельное возмещение процентов и суммы кредита	104
4.2.4. Единовременное погашение кредита	104
4.3. Льготные долгосрочные кредиты	105
4.3.1. Льготы заемщика при выдаче кредита	105
4.3.2. Грант-элемент при снижении ставки	106
4.3.3. Грант-элемент при снижении ставки и введении льготного периода без выплаты процентов	107
4.3.4. Грант-элемент при снижении ставки и введении льготного периода с выплатой процентов	108
4.4. Потребительский кредит	110
4.4.1. Определение потребительского кредита	110
4.4.2. Погашение потребительского кредита равными выплатами	111
4.4.3. Погашение потребительского кредита неравными выплатами	112
<i>Контрольные вопросы</i>	113
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	114
Глава 5. Операции со смешанным доходом	116
5.1. Операции наращивания с учетом инфляции	116
5.1.1. Показатели инфляции	116
5.1.2. Показатели наращивания с учетом инфляции	118
5.1.3. Модели наращивания с учетом инфляции	119
5.1.4. Формула Фишера	120
5.2. Конвертация валюты и наращивание процентов	124
5.3. Налог на доход	126
5.3.1. Налог на простой процент	126
5.3.2. Налог на сложный процент	128
5.4. Ссудные и учетные операции с удержанием комиссионных	131
5.4.1. Ссуды с однократным возмещением и удержанием комиссионных	131
5.4.2. Ссуды с многократным возмещением и удержанием комиссионных	132
5.4.3. Учетные операции с удержанием комиссионных	134
5.5. Купля-продажа краткосрочных ценных бумаг	135
5.5.1. Купля-продажа векселя	135
5.5.2. Купля-продажа депозитного сертификата	137
<i>Контрольные вопросы</i>	140
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	141

Глава 6. Оценка эффективности инвестиционных проектов.....	144
6.1. Система показателей инвестиционного проекта.....	144
6.2. Бухгалтерский метод расчета показателей инвестиционных проектов.....	145
6.3. Дисконтный метод оценки инвестиционных проектов.....	148
6.3.1. Чистый приведенный доход.....	148
6.3.2. Внутренняя норма доходности.....	151
6.3.3. Модифицированная норма доходности.....	153
6.3.4. Дисконтный срок окупаемости.....	154
6.3.5. Дисконтный индекс доходности.....	155
6.4. Выбор оптимального инвестиционного проекта.....	156
<i>Контрольные вопросы</i>	157
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	158
Глава 7. Финансовые инструменты.....	160
7.1. Определение финансовых инструментов.....	160
7.2. Оценка доходности облигаций.....	162
7.2.1. Бескупонные облигации.....	163
7.2.2. Купонные облигации с выплатой процентов и номинала в конце срока.....	164
7.2.3. Бессрочные купонные облигации с периодической выплатой процентов.....	165
7.2.4. Купонные облигации с периодической выплатой купонов и выплатой номинала в конце срока.....	166
7.2.5. Учет налогообложения и инфляции в моделях оценки доходности облигации.....	168
7.3. Оценка рыночной стоимости облигации.....	170
7.3.1. Купонные облигации с выкупной стоимостью, не равной номиналу.....	170
7.3.2. Серийные облигации.....	171
7.3.3. Аннуитетные облигации.....	172
7.3.4. Определение будущей рыночной стоимости облигации.....	173
7.3.5. Определение рыночной стоимости облигаций при заданной временной структуре процентных ставок.....	174
7.3.6. Учет налогообложения и инфляции в моделях оценки стоимости облигации.....	175
7.4. Учет изменчивости дисконтной ставки.....	178
7.4.1. Дюрация и выпуклость облигации.....	178
7.4.2. Иммунизирующее свойство облигации.....	181
7.5. Портфель облигаций.....	184
7.5.1. Оценка доходности и дюрации портфеля облигаций.....	184
7.5.2. Иммунизация портфеля облигаций.....	187
7.6. Акции.....	190
7.6.1. Примеры оценки доходности акций.....	192
7.6.2. Примеры оценки рыночной стоимости акций.....	193
<i>Контрольные вопросы</i>	194
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	195

Глава 8. Финансовые риски	197
8.1. Понятие риска	197
8.2. Количественные меры риска	199
8.3. Критерии принятия инвестиционных решений в условиях риска	203
<i>Контрольные вопросы</i>	205
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	205
Глава 9. Анализ портфеля рискованных ценных бумаг	207
9.1. Постановка задачи и модельные предположения портфельного анализа	207
9.2. Определение ожидаемой доходности и риска портфеля активов	208
9.3. Диверсификация активов как способ снижения риска	209
9.4. Оптимизация портфеля рискованных ценных бумаг по критерию минимума риска	211
9.5. Оптимизация портфеля рискованных ценных бумаг по критерию максимума функции полезности	216
9.6. Оптимизация комбинированного портфеля ценных бумаг	218
9.7. Рыночная однофакторная модель Шарпа	222
9.7.1. Оценка риска активов на основе модели Шарпа	223
9.7.2. Использование рыночной модели Шарпа для оптимизации портфеля	226
9.7.3. Структура риска актива	228
<i>Контрольные вопросы</i>	230
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	231
Глава 10. Модели оценки финансовых активов	232
10.1. Модель <i>SAPM</i>	232
10.1.1. Предпосылки модели и ее структура	232
10.1.2. Уравнение линии рынка капитала	233
10.1.3. Модель Шарпа – Линтнера	234
10.1.4. Модель Блэка	237
10.1.5. Применение модели <i>SAPM</i>	238
10.1.6. Эволюция моделей <i>SAPM</i> с учетом несимметричности влияния риска	241
10.2. Модели теории арбитражного ценообразования	243
10.2.1. Предпосылки и основная идея модели <i>APT</i>	243
10.2.2. Основные соотношения модели <i>APT</i>	243
10.2.3. Выбор факторов в модели <i>APT</i>	247
<i>Контрольные вопросы</i>	252
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	253
Глава 11. Введение в эконометрическое моделирование	255
11.1. Эконометрические модели и методы в системе финансового анализа	255
11.2. Построение линейной модели регрессии	256
11.2.1. Спецификация модели	257
11.2.2. Идентификация модели	258
11.2.3. Оценка качества модели	261
11.2.4. Использование модели	268

11.3. Обобщенная линейная модель регрессии.....	270
11.3.1. Спецификация обобщенной линейной модели множественной регрессии	270
11.3.2. Идентификация обобщенной линейной модели множественной регрессии	271
11.3.3. Верификация и использование обобщенной линейной модели множественной регрессии	272
11.3.4. Модель с гетероскедастичностью	272
11.3.5. Модель с автокорреляцией ошибок первого порядка	274
11.4. Некоторые проблемы спецификации эконометрической модели	277
11.4.1. Выбор формы зависимости.....	277
11.4.2. Регрессионная неоднородность данных	278
11.4.3. Мультиколлинеарность	280
11.5. Стохастические регрессоры.....	281
11.5.1. Спецификация модели со стохастическими регрессорами	281
11.5.2. Идентификация модели со стохастическими регрессорами.....	282
11.5.3. Проблема эндогенности и метод инструментальных переменных	283
<i>Контрольные вопросы</i>	285
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	286
Глава 12. Модели одномерных временных рядов	288
12.1. Модели случайных процессов <i>ARIMA</i>	288
12.1.1. Понятие временного ряда как реализации случайного процесса... 288	
12.1.2. Модели стационарных случайных процессов <i>ARMA</i>	289
12.1.3. Модели нестационарных процессов <i>ARIMA</i>	304
12.1.4. Моделирование сезонности с использованием моделей <i>ARIMA</i>	305
12.1.5. Прогнозирование с моделями <i>ARIMA</i>	306
12.2. Методология Бокса — Дженкинса	308
12.2.1. Исследование на стационарность.....	309
12.2.2. Идентификация модели.....	313
12.2.3. Оценивание	314
12.2.4. Оценка качества модели	314
12.3. Модели с условной гетероскедастичностью	320
12.3.1. Модель <i>ARCH</i>	320
12.3.2. Модель <i>GARCH</i>	323
12.3.3. Некоторые модификации модели <i>GARCH</i>	329
12.3.4. Стохастическая волатильность	331
12.4. Модели временных рядов с длинной памятью	331
12.4.1. Модели <i>ARFIMA</i>	331
12.4.2. Модели <i>ARFIMA</i> — <i>FIGARCH</i>	335
<i>Контрольные вопросы</i>	336
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	337
Глава 13. Производные финансовые инструменты	338
13.1. Определение и виды деривативов	338
13.2. Форвардные контракты	339

13.3. Модели оценки стоимости европейских опционов.....	342
13.3.1. Определение опциона. Опционные позиции	342
13.3.2. Стоимость опциона и факторы ее изменения	344
13.3.3. Паритет цен европейских опционов	344
13.3.4. Однопериодная модель оценки стоимости опциона.....	345
13.3.5. Представление однопериодной модели в риск-нейтральном мире...347	
13.3.6. Многопериодная модель оценки стоимости опциона. Формулы Кокса – Росса – Рубинштейна.....	348
13.3.7. Моделирование непрерывного изменения цены акции.....	351
13.3.8. Моделирование непрерывного изменения цены опциона. Модель Блэка – Шоулза	354
13.4. Измерение риска европейских опционов	356
<i>Контрольные вопросы</i>	361
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	362
Глава 14. Microsoft Excel в финансовой математике	363
14.1. Применение системы «Мастер функций»	363
14.1.1. Финансовые функции <i>Microsoft Excel</i>	364
14.1.2. Статистические функции <i>Microsoft Excel</i>	373
14.2. Применение надстройки «Поиск решения» в финансовых расчетах	375
14.2.1. Общая схема использования	375
14.2.2. Выбор оптимального инвестиционного проекта	377
14.2.3. Выбор оптимального портфеля Марковица	378
14.3. Применение надстройки «Анализ данных» в финансовых расчетах.....	379
14.4. Применение <i>Microsoft Excel</i> для планирования погашения ссуды.....	381
14.4.1. Алгоритм вычислений расходов по займу	381
14.4.2. Составление расписания погашения ссуды методом дифференцированных платежей.....	382
<i>Контрольные вопросы</i>	383
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	383
Литература	385
Приложение.....	387
Предметный указатель.....	412

Предисловие

Совершенствование финансовой деятельности сопровождается усложнением всей системы количественного финансового анализа. Появляются новые методы, углубляется теоретическая база, растет уровень автоматизации расчетов. Для того чтобы сориентироваться во всем многообразии современных финансовых алгоритмов, необходимо прежде всего понять основные принципы базовых вычислений, положенных в основу большинства расчетов. Поэтому в учебнике значительное внимание уделено так называемой финансовой арифметике, посвященной решению простейших задач, связанных с начислением процентов, потоками платежей. При этом методика изложения более сложных финансовых моделей направлена на формирование у читателя системного подхода к вычислениям на базе этих задач.

Основной трудностью количественного финансового анализа является сама процедура математического моделирования. Понимая суть финансовой операции, учащийся часто не может сопоставить ей адекватную математическую модель. Поэтому в учебнике сделан акцент на применение математического моделирования, логика которого отразилась и на форме всего изложения. Каждый тип задачи описан так, что ее содержательная постановка сопровождается формальным представлением с учетом идентификации переменных и связи между ними.

Пособие посвящено принципам финансовых расчетов и не содержит детализированных описаний финансовых операций. Основные понятия финансовой математики раскрыты в гл. 1. В учебник включены базовые расчеты, касающиеся методов начисления процентов (гл. 2 и 3), и некоторые простейшие прикладные расчеты (гл. 4 и 5). Рассмотрены детерминированные модели оценки эффективности инвестиционных проектов и стоимости ценных бумаг (гл. 6 и 7). Приведены основные методы анализа финансовых рисков и оптимизации инвестиционного портфеля в условиях неопределенности (гл. 8 и 9), а также классические модели ценообразования (гл. 10). Глава 11 посвящена введению в эконометрические методы, гл. 12 — моделям временных рядов. Изложены базовые принципы анализа производных ценных бумаг на примере форвардных контрактов и европейских опционов (гл. 13). Каждый тип задач иллюстрируется числовыми примерами. Приводятся задания для самостоятельного решения и вопросы для контроля знаний. В гл. 14 показано, как решать некоторые задачи финансовой математики с использованием табличного процессора *Microsoft Excel*. Прилагается список учебной литературы по дисциплине «Финансовая математика», в том числе та, которую автор использовал при подготовке данного учебника.

Большая часть методов и моделей финансовых вычислений изложены в учебнике в предположении того, что читатели имеют базовые знания по математике в объеме программы средней школы, в том числе владеют основами математического анализа и теории вероятностей. Вместе с тем надо иметь в виду, что изучение тем, посвященных портфельному анализу и дериватам, а также анализу временных рядов, потребует от читателя более серьезной математической подготовки.

В соответствии с современными образовательными стандартами пособие решает задачу формирования необходимых компетенций у студентов бакалавриата и магистратуры, обучающихся по экономическим и финансовым специальностям в рамках курса «Финансовая математика» и других курсов, связанных с методами количественного финансового анализа. В результате изучения материалов данного учебника студент должен:

знать

- предмет, цели и задачи финансовой математики;
- понятийный и категориальный аппарат финансовых расчетов;
- методологические принципы проведения количественного финансового анализа;
- современные представления о моделировании финансовых вычислений;

уметь

- обобщать и систематизировать методы финансовой математики;
- идентифицировать и классифицировать финансовые операции и их основные показатели;
- анализировать и интерпретировать результаты деятельности фондовых рынков;
- решать задачи, связанные с анализом деятельности предприятий;
- применять теоретические результаты для прогнозирования финансовых систем;
- грамотно ориентироваться в условиях финансовых рисков;
- выбирать необходимые методы для принятия управленческих решений в финансовой сфере;
- давать самостоятельную оценку эффективности финансовых операций;

владеть

- методами оценки доходности финансовых операций;
- современными технологиями программного обеспечения финансовых расчетов;
- спецификой обработки финансовых статистических данных;
- навыками системного анализа комплексных финансовых операций;
- навыками работы с учебной и научной литературой по финансовому анализу.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В ФИНАНСОВУЮ МАТЕМАТИКУ

В главе 1 рассматриваются термины и определения базовых понятий финансовой математики. В результате изучения данной главы студенты должны обладать следующими компетенциями:

знать

- предмет, цели и задачи финансовой математики;
- понятийный и категориальный аппарат базовых финансовых вычислений;
- методологические принципы моделирования финансовых вычислений;
- историю, логику и тенденции развития финансовой математики;

уметь

- обобщать и систематизировать простейшие финансовые операции;
- идентифицировать и классифицировать процентные ставки;

владеть

- основами методов вычисления процентов в финансовых расчетах.
-

1.1. Предмет и метод финансовой математики

Определение финансовой математики. В настоящее время существует множество методов финансового анализа, которые дают количественное решение задач финансового менеджмента. Эти методы различаются как по степени общности, так и по уровню теоретического обоснования, однако в основе каждого из них лежит некоторый базис, который и представляет собой *финансовую математику*.

Финансовая математика — это наука, которая изучает основные методы и модели количественного финансового анализа.

Финансовая математика непосредственно применяется в практической финансовой деятельности, а также используется в качестве инструментария для создания более сложных методов финансового анализа.

Метод финансовой математики. Основным методом исследования в финансовой математике является *метод математического моделирования*, который позволяет решать задачи финансового анализа, отображая взаимосвязи между финансовыми объектами в виде математических моделей.

При этом используется принцип системности, который выражается в поэтапном моделировании *финансовых операций* с переходом от простейших к более сложным моделям.

Финансовая операция — это действие, которое направлено на получение дохода, характеризуемого финансовыми показателями.

Основные задачи финансовой математики. К основным задачам финансовой математики относятся:

- анализ эффективности финансовой операции;
- оптимизация финансовой операции;
- планирование финансовой операции;
- сравнение финансовых операций.

Виды финансовых операций. В системе количественного финансового анализа финансовые операции разделяют по следующим направлениям.

По числу источников дохода:

- операции с одним источником дохода;
- операции с несколькими источниками дохода.

Например, операцией с несколькими источниками дохода является кредитная операция с учетом удержания комиссионных.

По характеру распределения денежных сумм во времени:

- операции с одним интервалом времени между платежами;
- операции с потоком платежей.

К операциям первого типа относится, в частности, ссудная операция с возмещением одним платежом. Если долг погашается последовательно выплатами, то выполняется операция с потоком платежей.

По форме получения дохода:

- операции с долговыми обязательствами;
- амортизация основных фондов;
- осуществление инвестиционных проектов;
- страхование.

В основу финансового анализа положены модели финансовых операций, связанных с предоставлением денег в долг.

Операции с долговыми обязательствами. Лицо, дающее деньги в долг, называют *кредитором*. Лицо, берущее деньги в долг, называют *заемщиком*. Предоставление денег в долг происходит в соответствии с *кредитным договором* и осуществляется в различных формах: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, получение векселя, приобретение облигаций и т.д. При заключении кредитного договора кредитор и заемщик договариваются о размере кредита, времени и способе его погашения, а также об уровне вознаграждения кредитора.

Среди операций с долговыми обязательствами обычно выделяют три группы операций:

- 1) депозитные операции;
- 2) кредитные операции;
- 3) операции с ценными бумагами, в том числе учетные операции.

Депозитная операция — это операция банка или другой финансовой организации по привлечению денежных средств в форме *вкладов* от юридических и физических лиц (вкладчиков), а также размещению этих средств в других кредитных учреждениях.

Депозит (вклад) — сумма денег, помещенная в банк на основании договора вклада на определенный срок или до востребования.

Банк пускает эти деньги в оборот, а в обмен выплачивает вкладчику *проценты*. Депозит является долгом банка перед вкладчиком, т.е. подлежит возврату.

Кредитная операция — это операция по предоставлению кредита.

Кредит (ссуда) — денежные средства, предоставленные банком или иной финансовой организацией (кредитором) по договору заемщику на условиях возвратности и платности в форме процентов за пользование кредитом.

Ценная бумага — документ, удостоверяющий с соблюдением установленной формы и обязательных реквизитов имущественные права, осуществление или передача которых возможны только при его предъявлении.

К базовым операциям с ценными бумагами, рассматриваемым в финансовой математике, относятся операции с векселями и депозитными сертификатами.

Вексель — ценная бумага, удостоверяющая обязательство векселедателя уплатить по наступлению предусмотренного векселем срока определенную денежную сумму.

Учет векселя — покупка банком или специализированным кредитным учреждением векселей до наступления срока платежа по ним, осуществляемая по цене, равной их номинальной стоимости, за вычетом процента, размер которого определяется количеством времени, оставшимся до наступления срока платежа, и величиной ставки процента.

Учетная операция — операция банка по учету (дисконту) векселей и других долговых обязательств.

Депозитный сертификат — это именная ценная бумага, удостоверяющая сумму депозита, внесенного в банк, и права вкладчика (держателя сертификата) на получение по истечении установленного срока суммы депозита и обусловленного в сертификате дохода в форме процентов.

Депозитный сертификат имеет бóльшую ликвидность, чем договор вклада, поскольку его можно заложить, учесть, продать.

1.2. История и современное состояние финансовой математики

Возникновение финансовой математики. Финансовые вычисления ведут свое начало с момента появления товарно-денежных отношений. В отдельную отрасль знаний они выделились в XIX в. под названием «коммерческая арифметика». В 1877 г. в Московской практической академии коммерческих наук был издан учебник «Коммерческая арифметика и торговые операции».

Этапы развития методов финансовых вычислений. Выделяют три основных исторических этапа.

1-й этап: до начала XIX в.

К основным методам в финансовых расчетах в данный период относились методы начисления процентов в кредитных операциях.

2-й этап: начало XIX — первая половина XX в.

Этот период характеризуется разработкой большого разнообразия схем погашения долгосрочной задолженности с использованием моделей аннуитетов.

3-й этап: вторая половина XX в. — настоящее время.

Особенностью этапа является учет неопределенности в анализе финансовых операций и применение инструментария теории вероятностей.

Классификация методов финансовых вычислений. Приводимая ниже классификация методов количественного финансового анализа позволяет определить место финансовой математики в данной системе знаний, а также ее внутреннюю структуру.

I. Классическая финансовая математика в условиях определенности:

- начисление процентов;
- определение стоимости потоков платежей;
- планирование погашения задолженности;
- анализ эффективности инвестиционных проектов;
- оценка стоимости простейших ценных бумаг.

II. Классическая финансовая математика в условиях неопределенности:

- оптимизация портфеля активов;
- теория иммунизации;
- анализ финансовых рисков;
- ценообразование производных ценных бумаг;
- модели эффективного рынка.

III. Современная стохастическая финансовая математика:

- теория арбитража;
- мартингалльный подход в теории страхования.

1.3. Основные понятия в финансовой математике

Время в финансовых расчетах. Необходимость учета времени определяется принципом неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Этот принцип обусловлен следующими основными причинами:

- деньги могут принести доход при инвестировании на определенный срок;
- покупательная способность денег снижается со временем вследствие инфляции.

Универсальной единицей измерения длительности финансовой операции является год.

Датированная сумма. Неравноценность денег во времени выражается в том, что каждая денежная сумма в финансовом анализе представляет собой *датированную сумму*, т.е. сумму, отнесенную к определенной дате.

Распределение датированных сумм во времени приводит к неправомерности обычных действий с ними, например сложения или вычитания.

Основные денежные суммы. Всякая финансовая операция осуществляется в течение заданного промежутка времени, которому соответствуют две основные денежные суммы.

Текущая (приведенная) стоимость — это сумма денег, отнесенная на начало финансовой операции.

Итоговая (будущая) стоимость — это сумма денег, отнесенная к концу финансовой операции.

В депозитной операции текущая стоимость — это сумма денег, помещаемая сегодня на депозитный счет, итоговая стоимость — это сумма денег, которая накопится на депозитном счете за определенный промежуток времени.

В кредитной операции текущая стоимость — это величина выдаваемой сегодня ссуды, итоговая стоимость — это сумма денег, которую следует вернуть через определенный промежуток времени.

Наращение и дисконтирование. В зависимости от того, какая из указанных сумм дана и какую нужно найти, выделяют два направления финансовых расчетов: *наращение* и *дисконтирование*.

Наращение — определение величины итоговой стоимости по заданной текущей стоимости.

Дисконтирование — определение текущей стоимости по ожидаемой итоговой сумме в будущем.

Термин *дисконтирование* используется также для определения значения любой стоимостной величины на более ранний момент времени.

Коэффициенты наращивания и дисконтирования. **Коэффициент наращивания** — отношение итоговой стоимости S к текущей стоимости P :

$$B = \frac{S}{P}.$$

Этот показатель характеризует темп роста денежных средств за определенный период.

Коэффициент дисконтирования (дисконтный фактор) — отношение текущей стоимости к итоговой стоимости:

$$v = \frac{P}{S}.$$

Этот показатель характеризует уровень снижения денежных средств при переходе от конца к началу финансовой операции.

Указанные коэффициенты могут выступать в качестве оценок эффективности финансовых операций, например в задачах их сравнения. Однако они неприменимы там, где требуется оптимизировать результаты по критерию времени или просто определить время операции, поскольку последнее в явном виде в выражениях для этих коэффициентов отсутствует.

Процент и дисконт. Результат финансовой операции в *абсолютном* выражении определяется в виде *процента* или *дисконта* с учетом заданного промежутка времени.

Процент — это абсолютная величина дохода, получаемая в результате финансовой операции за определенный период при *наращении*.

Дисконт — это абсолютная величина убытка, получаемая в результате финансовой операции за определенный период при *дисконтировании*.

В общем случае для двух субъектов финансовой операции значение процента для одного из них совпадает со значением дисконта для другого. Например, в ссудной операции дисконт заемщика равен проценту банка.

Процентная ставка. Процентная ставка (ставка) за определенный период времени — это величина, характеризующая относительное изменение денежной суммы F за этот период:

$$i = \frac{\Delta F}{F} \cdot 100,$$

где ΔF — абсолютная величина изменения суммы F .

Определенная таким образом процентная ставка измеряется в процентах (%). Если относительное изменение денежной суммы не умножать на 100, то ставка будет измеряться в долях единицы (дробях).

Размер процентной ставки зависит от следующих основных факторов:

- общее состояние экономики;
- прогноз динамики денежно-кредитного рынка;
- вид финансовой операции;
- вид валюты;
- срок финансовой операции.

Ставка применяется для решения следующих основных задач.

1. Вычисление процента (дисконта) при *начислении процентов* на заданную денежную сумму.
2. Определение *доходности финансовой операции*.

Начисление процентов. *Начисление процентов* на данное значение величины F — это определение абсолютного изменения этой величины ΔF по ее заданному относительному изменению, выраженному процентной ставкой i :

$$\Delta F = \frac{Fi}{100}.$$

Исходная денежная сумма F при этом называется базой начисления процентов. Рассматриваемый промежуток времени называется периодом начисления процентов.

В зависимости от вида базы начисления процентов и выбора начала отсчета в периоде начисления процентов различают два метода начисления процентов:

- 1) декурсивный (последующий);
- 2) антисипативный (предварительный).

При **декурсивном способе** проценты начисляются по ставке i в *конце* периода начисления, базой начисления процентов служит *текущая стоимость* P .

Процент I определяется выражением

$$I = \frac{Pi}{100}.$$

Пример 1.1

Сумма 80 тыс. руб. помещена на депозит на год на условиях начисления процентов в конце срока. Определим начисленный процент и итоговую сумму, если годовая процентная ставка 12%.

Дано: $P = 80$; $i = 12\%$.

Найти: I , S .

Решение

$$I = \frac{80 \cdot 12}{100} = 9,6 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$S = 80 + 9,6 = 89,6 \text{ (тыс. руб.)}.$$

При **антисипативном способе** проценты начисляются по ставке процента i в начале периода начисления, базой начисления служит *итоговая стоимость* S .

Процент I определяется выражением

$$I = \frac{Si}{100}.$$

Пример 1.2

Ссуда была выдана под 12% годовых с условием возвращения через год 80 тыс. руб. Определим доход банка и величину выданной ссуды.

Дано: $S = 80$; $i = 12\%$.

Найти: I, P .

Решение

$$I = \frac{80 \cdot 12}{100} = 9,6 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$P = 80 - 9,6 = 70,4 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Классификация ставок. Многообразие схем начисления процентов определяется многообразием ставок.

В зависимости от способа начисления процентов различают:

- ставки наращенения — при декурсивном способе начисления процентов;
- дисконтные ставки — при антисипативном способе начисления процентов.

Ставка наращенения (процентная ставка) i за период — это доля процента I за этот период в текущей стоимости P :

$$i = \frac{I}{P} \cdot 100.$$

Процент, начисленный с использованием ставки наращенения, называется *истинным процентом*.

Дисконтная ставка d за период — это доля дисконта за этот период в итоговой стоимости:

$$d = \frac{D}{S} \cdot 100.$$

Эту ставку иногда еще называют *процент авансом*, поскольку она позволяет начислить процент из суммы, возвращаемой в будущем, а также — *учетной ставкой*, поскольку она используется в операции учета векселя. В последнем случае текущая стоимость P называется *выручкой*.

Дисконт, начисленный с использованием дисконтной ставки, называется *истинным дисконтом*.

Ставки наращенения и ставки дисконтирования используют как в операциях наращенения, так и в операциях дисконтирования. При *дисконтировании* в зависимости от того, какая из этих ставок задана, различают два вида моделей:

- 1) модель математического дисконтирования — для ставки наращенная;
- 2) модель банковского учета — для дисконтной ставки.

В зависимости от вариативности базы начисления различают:

- простые ставки — при постоянной базе начисления;
- сложные ставки — при переменной базе начисления.

Простая ставка — это ставка при последовательном начислении процентов за несколько периодов на одну и ту же текущую стоимость.

Простой процент (дисконт) — это процент (дисконт), полученный при использовании простой ставки за определенный период.

Сложная ставка — это ставка при последовательном начислении процентов за несколько периодов, в каждом из которых — на итоговую стоимость предыдущего периода.

Сложный процент (дисконт) — это процент (дисконт), полученный при использовании сложной ставки за определенный период.

В зависимости от вариативности размера ставок различают:

- постоянные ставки — при постоянном значении;
- переменные ставки — при переменном значении.

Постоянная процентная ставка — это процентная ставка, размер которой постоянен в течение всего времени финансовой операции.

Переменная процентная ставка — это процентная ставка, размер которой изменяется в течение времени финансовой операции. Она может быть определена с помощью задания базовой ставки и *маржи* (надбавки), а также последовательности ставок разного размера.

В зависимости от способа определения времени различают:

- дискретные процентные ставки — при дискретном времени;
- непрерывные процентные ставки — при непрерывном времени.

Дискретная процентная ставка — это процентная ставка, при которой начисление всякий раз осуществляется за *определенный* промежуток времени (день, месяц, квартал, год).

Непрерывная процентная ставка — это процентная ставка, при которой начисление процентов осуществляется непрерывно. Она используется в теоретических расчетах для моделирования ситуаций, в которых период начисления очень мал.

Непрерывный процент (дисконт) — процент (дисконт), полученный при начислении с использованием непрерывной процентной ставки.

При решении задач в финансовой математике обычно по умолчанию используется годовая постоянная дискретная ставка наращенная.

Доходность финансовой операции. Доходность финансовой операции — это количественный показатель эффективности финансовой операции, характеризующий долю прибыли во вложенной денежной сумме.

Мерой доходности финансовой операции является, как правило, годовая процентная ставка.

Пример 1.3

Ссуда в размере 100 тыс. руб. была выдана на три года. Сумма к погашению составила 130 тыс. руб. Определим доходность операции в виде годовой простой процентной ставки.

Дано: $P = 100$; $S = 130$.

Найти: i .

Решение

Поскольку процент за каждый год составлял 10 тыс. руб., то годовая доходность равна

$$i = \frac{10}{100} \cdot 100 = 10\%.$$

Определение доходности финансовой операции зависит от вида операции. В частности, если доход обусловлен только начислением процентов по заданной ставке, то доходность такой операции измеряется именно этой ставкой. В финансовых операциях с несколькими видами дохода доходность определяется в виде эффективной ставки.

Эффективная ставка — это доля всех начисленных процентов за определенный период в исходной базе начисления.

Поскольку при начислении процентов ставка определяется не только количественным значением, но и способом начисления процентов, то ее однозначной характеристикой как меры доходности финансовой операции является результативность применения. Эта характеристика положена в основу сопоставления различных ставок (например, ставки наращенного и учетной ставки).

Две процентные ставки называются **эквивалентными**, если при начислении процентов с их использованием получается одинаковый финансовый результат.

Таким образом, различают два способа определения доходности финансовой операции:

- непосредственное вычисление ставки как относительной доли дохода в исходной денежной сумме с использованием моделей наращенного;
- переход от ставки, заданной в операции, к эквивалентной ей искомой ставке.

Контрольные вопросы

1. Что такое финансовая математика?
2. Какой основной метод исследования используется в финансовой математике?
3. Какие задачи ставит и решает финансовая математика?
4. Что такое финансовая операция?
5. Каковы основные направления классификации финансовых операций?
6. Какие вы знаете финансовые операции в зависимости от вида получаемого дохода?
7. Чем различаются составная и комплексная финансовые операции?
8. Что представляет собой депозитная операция?
9. Что представляет собой кредитная операция?
10. Что такое учетная операция?
11. Какое место занимает финансовая математика в системе методов количественного финансового анализа?
12. Что означает принцип неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени?
13. Какую роль играет время в финансовых расчетах?

14. Как учитывается время в финансовой математике?
15. Что такое датированная сумма?
16. Каковы основные типы моделей в финансовой математике?
17. Каковы основные виды процентных ставок?
18. Каковы методы начисления процентов?
19. Каковы основные направления финансовых расчетов?
20. Что такое множитель наращения?
21. Что такое множитель дисконтирования?
22. Что такое процент?
23. Что такое дисконт?
24. Что такое процентная ставка?
25. Каковы факторы, влияющие на размер ставки?
26. Для чего используется процентная ставка?
27. Каков принцип начисления процентов?
28. Какие существуют методы начисления процентов?
29. По каким направлениям классифицируются процентные ставки?
30. Что такое простая ставка?
31. Что такое простой процент?
32. Что такое простой дисконт?
33. Что такое истинный дисконт?
34. Что такое сложная ставка?
35. Что такое сложный процент?
36. Что такое сложный дисконт?
37. Что такое ставка наращения?
38. Что такое учетная ставка?
39. Что такое непрерывная ставка?
40. Что такое доходность финансовой операции?
41. Что такое эффективная ставка?
42. Какие ставки называются эквивалентными?

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Партия товара была куплена предпринимателем за 200 тыс. руб., а продана за 325 тыс. руб. Какова доходность операции для предпринимателя?

1.2. Капитал, помещенный в банк, вырос за первый год в 1,4 раза, за второй год — в 1,2 раза. Определите процентную ставку за два года. На сколько процентов увеличился капитал за все время?

1.3. Предприниматель, купив первую и вторую партии товара соответственно за 36 тыс. и 42 тыс. руб., продал их соответственно за 48 тыс. и 58 тыс. руб. Какая партия товара обеспечила больший процент прибыли?

1.4. Имеется два варианта вложения капитала на три года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличится на 15%, за второй год — на 35%, а за третий год — еще на 10%. Для второго варианта рост капитала составит каждый год 20% от суммы предыдущего года. Какой вариант следует предпочесть?

1.5. Предприятие реализовало партию товара за 45 тыс. руб., получив при этом 8% убытка. Найдите величину прибыли и доходность операции.

1.6. Товар первого вида до уценки стоил в 1,4 раза дороже, чем товар второго вида. Товар первого вида были уценены на 15%, а товар второго вида — на 30%. Во сколько раз товар первого вида дороже товара второго вида после уценки?

- 1.7.** Из-за порчи было списано 10% товара. Определите, сколько товара было списано, если его осталось 963 кг.
- 1.8.** Заработная плата сотрудника составляла 20 тыс. руб. Затем заработную плату повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Сколько стал получать служащий?
- 1.9.** За продажу товара посредник получил 80 тыс. руб., что составило 5% с продажной цены. За какую сумму был продан товар?
- 1.10.** Общий заработок рабочего составил 50 тыс. руб., включая премию в размере 10% от месячного оклада. Найдите величину премии и величину оклада.
- 1.11.** Товарооборот магазина в июне составил 940 тыс. руб., а в июле — 890 тыс. руб. На сколько процентов уменьшился товарооборот в июле?
- 1.12.** Цена на товар была понижена на 20%. На сколько процентов ее нужно повысить, чтобы получить исходную цену?